Espaços não reversíveis

Fernando Lucatelli Nunes

UnB-UC/UP[1]

Se X e Y são espaços topológicos quaisquer, o gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

munido da topologia de subconjunto de $X \times Y$.

Observe que a aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, a projeção da primeira coordenada $P : G(f) \to X$, em que $P(x, f(x)) = x$, é um homeomorfismo. Em particular, se a função f é contínua, então o seu domínio é homeomorfo ao seu gráfico.

A recíproca da última afirmação é falsa. Num contexto geral, encontrar exemplos de aplicações descontínuas tal que seu domínio é homeomorfo ao seu gráfico não é difícil. Na procura de um exemplo "simples" em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ (com topologia usual), podemos usar o seguinte resultado:

Seja X um espaço topológico. Se $g : X \to X$ é uma bijeção contínua com inversa descontínua, toma-se $f = g^{-1}$. Apesar de f ser descontínua, a aplicação

$$\begin{aligned} P : \quad G(f) &\to \quad X \\ (x, f(x)) &\mapsto \quad f(x) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo.

Ou seja, todo exemplo de bijeção contínua de um espaço topológico em si mesmo com inversa descontínua nos proporciona um exemplo de aplicação descontínua com domínio homeomorfo ao gráfico.

[1] O autor era aluno de graduação da UnB, quando submeteu esta nota, e agora é aluno do Programa Interuniversitário de Doutoramento em Matemática UC/UP, em Portugal.

Lembre-se que, se X e Y são espaços topológicos, uma aplicação $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se, e somente se, $f : X \to Y$ é uma bijeção contínua aberta. Este texto apresenta uma breve discussão sobre bijeções contínuas, incluindo uma forma de se construir, partindo de dois espaços não homeomorfos, um par (X, f) em que X é um espaço topológico e $f : X \to X$ é um bijeção contínua não aberta.

Espaços reversíveis

Se X e Y são espaços topológicos não homeomorfos, é evidente que toda bijeção contínua $f : X \to Y$ possui inversa descontínua. Então encontrar exemplos de bijeções contínuas não-abertas de X em Y é, neste caso, equivalente a encontrar bijeções contínuas de um espaço no outro. O exemplo clássico disso é a aplicação $E : [0, 1) \to S^1$, em que $E(x) = e^{2\pi i x}$. De forma geral, se τ e $\mathfrak{t}$ são topologias para um conjunto Y segue que a aplicação identidade $\mathrm{id} : (Y, \mathfrak{t}) \to (Y, \tau)$ é contínua não aberta se, e somente se, τ é estritamente menos fina que $\mathfrak{t}$. Em particular, se X e Y têm mesma cardinalidade, com X discreto e Y não discreto, segue que qualquer bijeção com domínio em X e contradomínio em Y é uma aplicação contínua não aberta.

Encontrar bijeções contínuas não abertas com contradomínio igual ao domínio também não é tão difícil. Por exemplo, se $X = \mathbb{Q}$ com topologia $\{\mathbb{Q}, \emptyset, P\}$, em que P é conjunto dos números inteiros pares. Define-se $T : X \to X$, em que $T(x) = \frac{x}{2}$. Tem-se que T é contínua, mas $T(P)$ não é aberto. Outro exemplo é munindo $\mathbb{Z}$ da topologia em que os abertos são os conjuntos $\{x \in \mathbb{Z} : x \leq a\}$, para cada $a \leq 0$ inteiro. Assim, a função $T_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $T_1(k) = k + 1$ é contínua bijetiva, mas $T_1(\{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\})$ não é aberto.

Note que nem todo espaço topológico admite uma bijeção contínua não aberta de si em si mesmo. Por exemplo, todo espaço Hausdorff compacto K não admite uma bijeção contínua não aberta de K em K, pois toda bijeção contínua de K em K, neste caso, é um homeomorfismo.

Um espaço X tal que toda bijeção contínua $f : X \to X$ é um homeomorfismo é chamado de *espaço reversível* (evidentemente uma propriedade topológica de X). Essa definição de espaço reversível pode ser encontrada numa versão equivalente em [7].

Como observado, sabemos que todo espaço Hausdorff compacto é reversível. Temos, também, que todos os espaços discretos são reversíveis, uma vez que bijeções entre espaços discretos são homeomorfismos.

Espaços T_1 finitos são discretos e, portanto, são reversíveis. De forma mais geral, espaços finitos são todos reversíveis. Para verificar isso, basta ver que se X é um espaço de cardinalidade n e $f : X \to X$ é uma bijeção contínua então a iterada $f^{n!-1}$ é a inversa de f e, como f é contínua, então $f^{n!-1}$ é contínua, de onde segue que f é homeomorfismo.

Com argumento parecido, podemos provar que se um espaço topológico tem um número finito de componentes conexas todas reversíveis então ele é reversível. Com efeito, qualquer bijeção f contínua dele nele mesmo induz uma bijeção entre as componentes conexas. Portanto, já que as componentes conexas são reversíveis, segue que $f^{n!}$ é um homeomorfismo de cada componente conexa nela mesmo. Como as componentes conexas formam uma partição finita do espaço por fechados, segue que $f^{n!}$ é um homeomorfismo. De onde temos que $f^{-1} = f^{-(n!)} \circ f^{n!-1}$ é composição de aplicações contínuas.

Um exemplo importante de espaço reversível é o próprio $\mathbb{R}^n$. Esse resultado pode ser tomado como consequência do famoso teorema de Jordan que diz que o complementar da imagem de uma esfera S^{n-1} por uma aplicação contínua injetiva $J : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ possui duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada (ver [6]).

Teorema. *Toda bijeção contínua $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo. Ou seja, o espaço $\mathbb{R}^n$ é reversível.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma bijeção contínua. Para provar que f é aberta, basta provar que imagem de qualquer bola aberta é aberta.

Dada uma bola aberta $B_r(a)$ de centro a e raio r em $\mathbb{R}^n$, toma-se a esfera $A = S_r(a)$ centrada em a e com raio r. Pelo teorema de Jordan mencionado anteriormente, o complementar de $f(A)$ é formado por duas componentes conexas (uma limitada e outra ilimitada).

Argumentamos que essas componentes conexas são abertas em $\mathbb{R}^n$. Em primeiro lugar, é imediato que essas componentes são abertas fechadas em $\mathbb{R}^n \setminus f(A)$. Mais ainda, como $f(A)$ é compacto (por ser imagem de compacto por uma aplicação contínua), então $f(A)$ é fechado em $\mathbb{R}^n$. Daí segue que $\mathbb{R}^n \setminus f(A)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Como as componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus f(A)$ são abertas em $\mathbb{R}^n \setminus f(A)$, segue que elas são abertas em $\mathbb{R}^n$ também.

Fazendo uma restrição da aplicação f, temos que $f : \mathbb{R}^n \setminus A \to \mathbb{R}^n \setminus f(A)$ é uma aplicação contínua bijetiva. Além disso, $\mathbb{R}^n \setminus A$ é formado por duas componentes conexas: $B_r(a)$ e $\mathbb{R}^n \setminus B_r(a)$. Logo, temos uma bijeção contínua de um domínio formado por duas componentes conexas num contradomínio formado por duas componentes conexas.

Argumentamos a seguir que, nessas condições, a imagem de uma componente conexa no domínio é uma componente conexa no contradomínio. Temos que a imagem de cada uma dessas componentes conexas do domínio está contida em alguma das outras componentes conexas, pois imagem por aplicação contínua de conexo é conexa. Não poderíamos ter a imagem das duas componentes conexas numa única componente conexa, pois isso contrariaria a bijetividade. Logo $f(B_r(a))$ está contida numa das componentes conexas, digamos C_1, e $f(\mathbb{R}^n \setminus B_r(a))$ na outra componente conexa, digamos C_2. Se a inclusão $f(B_r(a)) \subset C_1$ fosse própria, teríamos contradição com a bijetividade. Logo $f(B_r(a)) = C_1$.

Como as componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus f(A)$ são abertas, ficou provado que a imagem da bola aberta é aberta. Portanto f é homeomorfismo. □

Espaços não reversíveis

Agora apresentamos uma forma fácil de se construir espaços não reversíveis. A ideia foi apelar para uma outra situação mais fácil: encontrar bijeções contínuas entre dois espaços não homeomorfos.

Sejam Y, W espaços tais que existe uma bijeção contínua não aberta $\varphi : W \to Y$. O espaço X reversível construído a partir desses dois espaços é uma reunião disjunta (infinita) enumerável de cópias (homeomorfas) a Y unida com uma reunião disjunta (infinita) enumerável de cópias (homeomorfas) a W. Ou seja, a reunião disjunta

$$X = \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} Y_j \right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} W_k \right)$$

com a topologia de união disjunta[2], em que $W_1 = W$, W_k é homeomorfo a W, para todo $k \geq 2$, $Y_1 = Y$ e Y_j é homeomorfo a Y, para todo $j \geq 2$.

Sejam $H_k : W_{k+1} \to W_k$ e $G_k : Y_k \to Y_{k+1}$ homeomorfismos. Para mostrar que X não é reversível, definimos a bijeção contínua não aberta $R : X \to X$ do conjunto X tal que $R|_{W_{k+1}} = H_k$ e $R|_{Y_k} = G_k$, para $k \in \mathbb{N}^*$, e tal que $R|_{W_1} = \varphi$. Pelo fato de φ não ser aberta, segue que R não é aberta. Abaixo, é ilustrada a definição de R em cada "parte":

$$\cdots \overset{H_3}{\to} W_3 \overset{H_2}{\to} W_2 \overset{H_1}{\to} W_1 \overset{\varphi}{\to} Y_1 \overset{G_1}{\to} Y_2 \overset{G_2}{\to} Y_3 \overset{G_3}{\to} \cdots$$

De forma mais explícita, podemos fazer a seguinte construção: se Y e W são espaços não homeomorfos tais que existe uma bijeção contínua $\varphi : W \to Y$, tomam-se as famílias de espaços $F_1 = \{Y \times \{k\}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ e $F_2 = \{W \times \{-k\}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$. Define-se, então, X como sendo a união disjunta

$$X = \bigcup_{Z \in F_1 \cup F_2} Z,$$

em que X está munido da topologia da união disjunta.

[2] A topologia de união disjunta é resultado da "soma" ou coproduto de espaços topológicos: ver [5].

Resta provar que X é, de fato, não reversível. Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, definem-se os homeomorfismos

$$\begin{aligned} H_k : Y \times \{k\} &\longrightarrow Y \times \{k+1\} \\ (y,k) &\longmapsto (y, k+1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} G_k : W \times \{-k-1\} &\longrightarrow W \times \{-k\} \\ (w, -k-1) &\longmapsto (w, -k)\,, \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{N}^*$, e define-se $R : X \to X$ tal que

$$\begin{aligned} R(w,-1) &= (\varphi(w), 1)\,,\ \forall w \in W \\ R(x) &= G_k(x)\,,\ \forall x \in W \times \{-k-1\} \\ R(x) &= H_k(x)\,,\ \forall x \in Y \times \{k\}\,, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Fica fácil verificar que R está bem definida e que ela é uma bijeção contínua: de fato, ela é contínua em cada parte aberta-fechada disjunta que compõe a união disjunta. Mas, como φ é bijeção contínua não aberta, existe um aberto $U \subset W$ tal que $\varphi(U)$ não é aberto em Y. Portanto $R(U \times \{-1\}) = \varphi(U) \times \{1\}$ não é aberto em $Y \times \{1\}$, de onde segue que não é aberto em X. Ou seja, obtivemos um espaço X e uma aplicação contínua bijetiva não aberta $R : X \to X$. Dessa forma, conseguimos um espaço não reversível.

Observe que esse método só fornece exemplos de espaços não reversíveis com um número infinito de componentes conexas, as quais podem ser reversíveis dependendo dos espaços usados para a construção.

Exemplos em $\mathbb{R}^n$

Voltemos a considerar a aplicação $\varphi : [0,1) \to S^1$, em que $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$. É fácil verificar que essa aplicação é uma bijeção contínua e, como os dois espaços não são homeomorfos, segue que não é aberta. Assim, basta construir o exemplo como o descrito, tomando $W = [0,1)$ e $Y = S^1$.

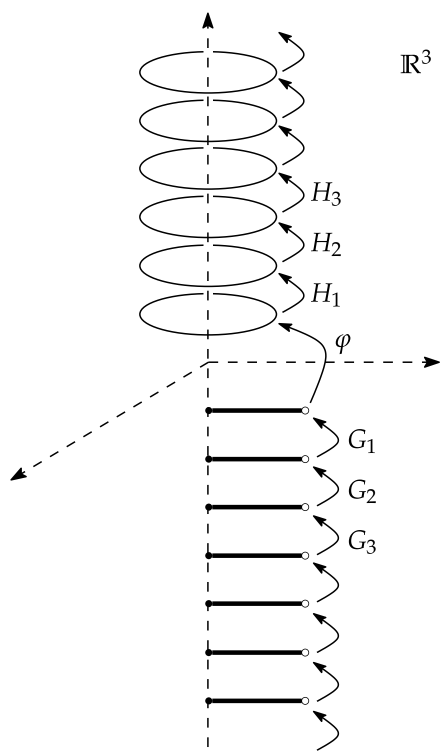

Figura 1: Subespaço topológico de $\mathbb{R}^3$ não reversível construído com cópias de S^1 e $[0,1)$.

Para que X seja um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, tomamos, de fato, $W = \{0\} \times [0,1)$ e $Y = S^1$ como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ e definimos

$$X = \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} Y \times \{j\} \right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} W \times \{-k\} \right)$$

como um subconjunto de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. E, depois, define-se $R : X \to X$ como foi definido na seção acima (ver Figura 1). Temos, então, que X é um subespaço (topológico) de $\mathbb{R}^3$ não reversível e R é um exemplo de bijeção contínua não aberta de X em X. Por fim, como foi observado no início, esse exemplo proporciona um exemplo de função descontínua $T = R^{-1}$ com domínio homeomorfo ao gráfico de T.

No entanto não é necessário que o conjunto seja construído em $\mathbb{R}^3$. Na verdade, os produtos $W \times \{-k\}$ e $Y \times \{k\}$ foram necessários apenas para a construir uma reunião disjunta (com a topologia disjunta) de cópias do espaço. E, portanto, o exemplo apresentado é equivalente ao exemplo ilustrado na Figura 2.

Usando o método descrito na seção anterior, podemos construir vários exemplos de espaços não reversíveis em $\mathbb{R}^n$, bastando encontrar um par de espaços $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ não homeomorfos tais que exista bijeção contínua $X \to Y$. Um outro exemplo simples e interessante que pode ser destacado de espaço não reversível em $\mathbb{R}^2$ é usando $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Por $\mathbb{Z}$ ser discreto, qualquer bijeção entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ é uma aplicação contínua não aberta. Partindo de uma bijeção $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, usamos o mesmo procedimento para construir o exemplo de espaço (enumerável) não reversível em $\mathbb{R}^2$.

Por fim, é razoável citar um exemplo na reta. Usando a mesma ideia da construção a partir de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, tomamos os conjuntos discretos disjuntos

$$W_k = \left\{ -k + m^{-1} \, : \, m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \right\}$$

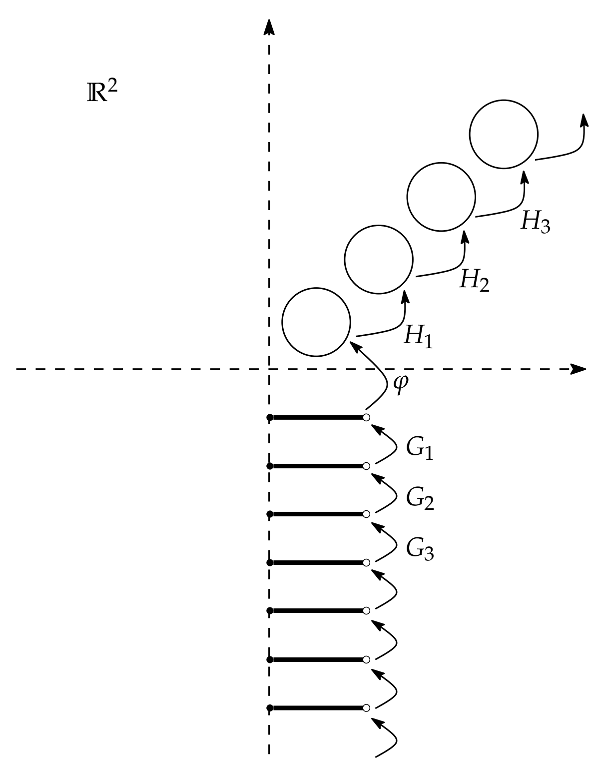

Figura 2: Subespaço topológico de $\mathbb{R}^2$ não reversível construído com cópias de S^1 e $[0,1)$.

(que são cópias de W_1) e os conjuntos não discretos $Y_k = \{k + m^{-1} : m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\} \cup \{k\}$. Qualquer bijeção $\varphi : W_1 \to Y_1$ é uma aplicação contínua não aberta e, portanto,

$$X = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} W_k \right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} Y_k \right)$$

é um subespaço topológico não reversível de $\mathbb{R}$.

Shift

Para finalizar, será apresentada uma outra maneira de se construir espaços não reversíveis partindo-se de uma bijeção contínua entre espaços não homeomorfos. Essa maneira não é útil para encontrar exemplos em $\mathbb{R}^n$, por usar produtos enumeráveis de espaços, mas a construção final é de certa forma parecida com a construção anterior: usamos a aplicação denominada "shift", muito comum na teoria de sistemas dinâmicos. Se temos que W não é homeomorfo a Y e existe uma bijeção contínua $\varphi : W \to Y$, podemos tomar o espaço $X = \cdots W \times W \times Y \times Y \times \cdots$. Ou seja,

$$X = \prod_{k \in \mathbb{Z}} J_k,$$

em que $J_i = W$ para $i \leq 0$, e $J_i = Y$ para $i > 0$. Define-se, então, em X, a aplicação

$$\begin{aligned} T : X &\longrightarrow X \\ (\cdots, x_{-1}, \dot{x_0}, x_1, \cdots) &\longmapsto (\cdots, x_{-2}, \dot{x}_{-1}, \varphi(x_0), \cdots). \end{aligned}$$

É fácil verificar que essa aplicação T é uma bijeção contínua não aberta e, portanto, X é um espaço não reversível.

Agradecimentos. Agradeço à professora Liliane de Almeida Maia por ter se disponibilizado a discutir sobre o tema, o que causou ideias e motivou a composição deste artigo. Ao professor Mauro Spreafico, pelo exemplo de $\mathbb{Q}$, munido da topologia $\{\emptyset, P, \mathbb{Q}\}$. E, por fim, ao professor Eduardo Colli pela atenção que prestou durante todo o processo de submissão e edição do artigo.

Referências

[1] HALMOS, P. R. *Naive set theory*. Princeton: Van Nostrand, 1960.

[2] KELLEY, J. L. *General topology*. New York: Van Nostrand, 1961. (The University Series in Higher Mathematics)

[3] LIMA, E. L. *Curso de Análise.* v. 1. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (Projeto Euclides)

[4] LIMA, E. L. *Curso de Análise.* v. 2. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides)

[5] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção Textos Universitários)

[6] LIMA, E. L. *Homologia Básica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Projeto Euclides)

[7] RAJAGOPALAN, M.; WILANSKY, A. Reversible topological spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society*, v. 6, n. 2, p. 129–138, 1966.

Fernando Lucatelli Nunes
`flnlucatelli@gmail.com`